# s-d相互作用のlower divergent termの起源について(I) : Basic Formulation



川村, 清

# s－d相互作用の lower divergent term の起源について (I)

## ― Basic Formulation ―

物性研* 川村 清

（6月5日受理）

## §1. Introduction

まず，ここで報告することの大部分は，すでにISSP，technical report[1] で報告済みであることをお断りしておく。また，Progress にも投稿中であるが，一人の referee の方が，なかなか納得して下さらない。しかしながら，s－d相互作用の問題を考える手段としても，また Kondo anomaly の起源についても，有用な information を与えると信じているので，その後判ったこともあわせてここに投稿した次第である。

われわれの扱う system は，Hamiltonian

$$
\begin{cases}
H = H_0 + H_1 \\
H_0 = \Sigma_p \varepsilon_p a_p^+ a_p \\
H_1 = (-J/N) \Sigma_n \Sigma_{pp'} \exp[-i(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}')\cdot R_n](a_p^+(S_n\cdot\sigma)a_{p'})
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

で記述される稀薄な磁性不純物を含む合金である。(1.1) でs－電子の operator a，$a^+$ は二次元 vector である。

このような系で，spin は，次の3つの性質を持っている。まず第1に，それはs－電子に対して，一種のポテンシャルとして作用する。ただし，その効果は，s－電子の spin と局在 spin の相対的な向きに depend している。第2に，spin は，s－電子の作る polarization field の中で歳差

* 現在，東大理

運動をする。このことは数学的には

$$i(dS/dt) = [H, S] = (-J/N)\Sigma_{pp'}(a_p^+\sigma a_{p'}) \times S \quad (1.2)$$

によって記述される。もちろん，全スピン角運動は保存している。第3に spin は，その量子化軸のまわりで quantum な fluctuation をしている。そのことは，

$$S \times S = iS \quad (1.3)$$

すなわち，spin の operator が互いに交換しないことによって記述出来る。第1の性質は，たとえば RKY－polarization[2] や，Abrikosov and Gorkov[3] の稀薄合金の超伝導の理論等，これまでにいろいろと調べられている。また，第2の性質は，たとえば Hasegawa[4] が稀薄合金の ESR の理論において調べられている。第3の性質は，Kondo によって，稀薄合金の抵抗極少の理論が展開されて以来[5]，いわゆる Kondo anomaly の原因として注目されて来た。

しかし，（1.3）が Kondo 効果の重要な要因であることは判っているが，それ以外の二つの性質は，Kondo anomaly にどのように影響するのだろうか。あるいは，これまでの理論で，（1.3）を，どれほど有効にとり入れて来たであろうかという疑問が出て来る。実際，これまでに，多くの方法が提案されている。たとえば Abe[6] は，電子ガスの Goldstone 流のグラフ法を使った。また，Abrikosov[7] や Nakajima[8] の議論は Spin operator をある ficticious な Fermion の field operator で記述して graph を書く方法である。これらの方法は，結局沢山の Spin operator の積の matrix を計算しなくてはならない。Doniach[9] の方法が spin の commutator を積極的に使った唯一の例であると思われるが，いささかやっかいな方法である。

上の3つのスピンの性質を一度に記述出来るのは，Spin operator のみからなる Green 関数の運動方程式である。その一般的な formulation を §2 で展開し，§3 ではその計算法を示す。

最後に注意すべきことは，摂動論的な議論といえども，決して時代おくれとはいえないということである。そのことは，たとえば Nakajima[8] が Abrikosov[7] の理論で得られたことを駆使して，Yoshimori[10] 方程式を求めたことからも明らかなように，Yosida によって提案された[11] bound state についての議論をする時，摂動論で得られた議論は可成り役に立つからである。このことは，多分 excitation を議論するにあたっても有用であろう。というのは，今考えている bound state は，超伝導のような macroscopic なものではないからである。いいかえれば一個の s－電子が Spin につかまるや，たちまち全体が不安定になって，つぎつぎに Fermi 球がこわれるわけではないから，1個の電子を除いては，摂動論的な picture の範囲で議論出来るものと思われる。

## §2. Spin Green 関数の運動方程式

稀薄合金で，二つ以上の不純物によって散乱される電子の波の干渉を無視すれば，s－電子の Green 関数の self－energy part は，次のように書ける。[10]

$$\Sigma_{\uparrow p}(i\varepsilon_n) = -N_i(-J/N)^2$$
$$\times \Sigma_{pp'} \ll (S\cdot\sigma a_p)(i\varepsilon_n);(a^+_{p'}(S\cdot\sigma)(-i\varepsilon_n)\gg \qquad (2.1)$$

ここで $N_i$ は不純物 Spin の数。$\varepsilon_n = (2n+1)\pi T$，T は温度，n は整数である。一体の Green 関数は次のように定義する。

$$\ll A(\tau_1);B(\tau_2)\gg = -\langle T_\tau(A(\tau_1)B(\tau_2))\rangle$$

$$\ll A(i\varepsilon_n);B(i\varepsilon_{n'})\gg$$
$$= T\iint_0^{(1/T)} \ll A(\tau_1);B(\tau_2)\gg \exp[i\varepsilon_n\tau_1+i\varepsilon_{n'}\tau_2]d\tau_1 d\tau_2 \qquad (2.2)$$

（振動外場がなければ $\varepsilon_n = -\varepsilon_{n'}$）

今後簡単の為に $\varepsilon_n$ の suffix はおとす。（2.1）の Green 関数を次のように書こう。

$$\ll (S\cdot\sigma)a_p(\tau_1) \;;\; a^+_{p'}(S\cdot\sigma)(\tau_2)\gg$$

$$=\int_{-\beta}^{\beta}\ll(S\cdot\sigma)(\tau_1),\ a_p(\tau_3),\ a^+_{p'}(S\cdot\sigma)(\tau_2)\gg\delta(\tau_1-\tau_3)d\tau_3 \tag{2.3}$$

ここで3体の Green 関数は次のように定義する。まず $\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3>0$ なら，

$$\ll A(\tau_1),B(\tau_2),C(\tau_3)\gg=-<T_\tau(A(\tau_1),B(\tau_2),C(\tau_3))> \tag{2.4}$$

ここで $T_\tau$ は，3つの operator を時間の順序に従って並べかえ，その際 s－電子の operator のいれかえに際して－1をかけることを意味する。(Spin operator は boson operator とみなす。[12]) また，$\tau_i<0$ の場合は，次の境界条件で定義する。たとえば $\tau_1<0$ の場合

$$\ll A(\tau_1),B(\tau_2),C(\tau_3)\gg=(-1)^\eta\ll A(\tau_1+\beta),B(\tau_2),C(\tau_3)\gg \tag{2.5}$$

$\eta$ は，A が s－電子の operator なら奇数，Spin operator なら偶数とする。(2.3)を使って，

$$\ll(S\cdot\sigma\, a_p)(i\varepsilon)\,;\,(a^+_{p'}\,S\cdot\sigma)(-i\varepsilon)\gg$$

$$=T\Sigma_{\varepsilon_1}\ll(S\cdot\sigma)(\varepsilon-\varepsilon_1),\ a_p(\varepsilon_1)\cdot\ a^+_{p'}(S\cdot\sigma)(-\varepsilon)\gg \tag{2.6}$$

(2.6)の Green 関数は次の運動方程式に従う。

$$(i\varepsilon_1-\varepsilon_p)\ll(S\cdot\sigma)(\varepsilon-\varepsilon_1),\ a_p(\varepsilon_1),\ a^+_{p'}(S\cdot\sigma)(-\varepsilon)\gg$$

$$=(-J/N)\Sigma_{p'_2}\ll(S\cdot\sigma)(\varepsilon-\varepsilon_1),(S\cdot\sigma)a_{p_2}(\varepsilon_1),\ a^1_{p'}(S\cdot\sigma)(-\varepsilon)\gg$$

$$-\ll(S\cdot\sigma)(\varepsilon-\varepsilon_1),(S\cdot\sigma)(\varepsilon_1-\varepsilon)\gg\delta_{pp'} \tag{2.7}$$

(2.7)の右辺第一項の Green 関数で $S\cdot\sigma a_{p_2}$ の時刻を(2.3)のように分離して，$a_{p_2}$ の運動を追う。それを繰り返すと結局，[12]

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma_{p\uparrow}(i\varepsilon) = -N_i \sum_{n=1}^{\infty} (-J/N)^{n+1} T^n \Sigma_{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n} \\ \quad \times \prod_{j=1}^{n} (\Sigma_{p_j} (i\varepsilon_j - \varepsilon_{p_j})^{-1}) S^{(1)}_{\uparrow\uparrow}(\varepsilon, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \\ S^{(1)}_{\alpha\beta}(\varepsilon, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \end{array}\right.$$

$$= \langle\langle (S\cdot\sigma)_{\alpha\sigma_1}(\varepsilon-\varepsilon_1),\ (S\cdot\sigma)_{\sigma_1\sigma_2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2),\ \cdots$$

$$(S\cdot\sigma)_{\sigma_{n-1}\sigma_n}(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n),\ (S\cdot\sigma)_{\sigma_n\beta}(\varepsilon_n-\varepsilon) \rangle\rangle \quad (2.8)$$

（2.8）の Green 関数を“Spin Green 関数”と呼ぶことにしよう。以下では別に混乱はないと思われるから，次のように省略して書く，

$$S^{(1)}_{\uparrow\uparrow}(\varepsilon,\ \varepsilon_1,\ \cdots,\ \varepsilon_n)$$

$$= \langle\langle S_1(\varepsilon-\varepsilon_1),\ S_2(\varepsilon_1-\varepsilon_2),\ \cdots,\ S_{n+1}(\varepsilon_n-\varepsilon) \rangle\rangle$$

この spin Green 関数は次の運動方程式に従う。

$$(i\varepsilon_n - i\varepsilon_{n-1}) \langle\langle S_1(\varepsilon-\varepsilon_1)\ \ S_2(\varepsilon_1-\varepsilon_2),\ \cdots,$$

$$S_n(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n),\ \ S_{n+1}(\varepsilon_n-\varepsilon) \rangle\rangle$$

$$= \langle\langle \cdots\cdots,\ [H, S_n](\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)\ \ S_{n+1}(\varepsilon_n-\varepsilon) \rangle\rangle$$

$$+ \{ \langle\langle \cdots\cdots,\ S_{n-1}(\varepsilon_{n-2}-\varepsilon_{n-1})\ \ [S_n, S_{n+1}](\varepsilon_{n-1}-\varepsilon) \rangle\rangle$$

$$+ \langle\langle \cdots\cdots,\ [S_n, S_{n-1}](\varepsilon_{n-2}-\varepsilon_n),\ S_{n+1}(\varepsilon_n-\varepsilon) \rangle\rangle$$

$$+ \text{他の commutator を含む項.} \} \quad (2.9)$$

（2.9）から $\varepsilon_n \neq \varepsilon_{n-1}$ の時の Spin Green 関数の値が求まる。$\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}$ の時の値は，次の sum rule から求まる。

$$T\Sigma_{\varepsilon_n} \langle\langle \cdots\cdots,\ S_n(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)\ \ S_{n+1}(\varepsilon_n-\varepsilon) \rangle\rangle$$

$$= T\sum_{\varepsilon_n} \int\cdots\int_0^{\beta} d\tau_1 \cdots\cdots d\tau_{n+1} \exp\left[ i\{\tau_1(\varepsilon-\varepsilon_1)+\tau_2(\varepsilon_1-\varepsilon_2) + \cdots\cdots + \tau_n(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n) + \tau_{n+1}(\varepsilon_n-\varepsilon)\}\right]$$

$$+ \ll \cdots\cdots, S_n(\tau_n), S_{n+1}(\tau_{n+1}) \gg$$

$$= \beta\, \delta_{\varepsilon,\varepsilon_{n-1}} S(S+1) \ll \cdots\cdots, S_{n-1}(\varepsilon_{n-2}-\varepsilon) \gg \quad (2.10)$$

から

$$\ll \cdots\cdots, S_n(0), S_{n+1}(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon) \gg$$

$$= -\sum_{\varepsilon_n \neq \varepsilon_{n-1}} \ll \cdots\cdots, S_n(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n), S_{n+1}(\varepsilon_n-\varepsilon) \gg$$

$$+ \beta^2 \delta_{\varepsilon,\varepsilon_{n-1}} S(S+1) \ll \cdots\cdots, S_{n-1}(\varepsilon_{n-2}-\varepsilon) \gg \quad (2.11)$$

（2.9），（2.11）から

$$S^{(1)}_{\uparrow\uparrow}(\varepsilon, \varepsilon_1, \cdots\cdots \varepsilon_n)$$

$$= (i\varepsilon_n - i\varepsilon_{n-1})^{-1} [\,(2.9)\text{ の右辺}\,] (1-\delta_{\varepsilon_n,\varepsilon_{n-1}})$$

$$- \delta_{\varepsilon_n \varepsilon_{n-1}} \sum_{\varepsilon_n \neq \varepsilon_{n-1}} (i\varepsilon_n - i\varepsilon_{n-1})^{-1} [\,(2.9)\text{ の右辺}\,]$$

$$+ \beta^2 \delta_{\varepsilon,\varepsilon_n} \delta_{\varepsilon,\varepsilon_{n-1}} S(S+1) S^{(1)}_{\uparrow\uparrow}(\varepsilon, \varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_{n-2}) \quad (2.12)$$

これがもっとも基礎的な方程式である。（2.1 2）の最後の項は Spin の classical potential としての性質を表わしている。よく知られているように，classical potential による電子の散乱は elastic scattering であり，実際この項は，中間状態で電子の振動数が入射波の振動数 $\varepsilon$ に等しい。（2.9）の右辺第一項は§１で述べた Spin の第２の性質をあらわしている。（2.9）の残りの項は，spin の quantum feuctuation をあらわしている。

（2.1 2）の形を見て判るように，$(i\varepsilon_n - i\varepsilon_{n-1})^{-1}$ に比例する項は，振動数についての積分が対数関数を与えて，Kondo 効果を与える。しかし，かといって（2.9）の右辺の全てがきくわけではない。実際，spin が s 一電子の作る polarization field の周囲をまわるというようなことは，classical spin であっても起りうることであり，量子効果による Kondo 効果とは直接の関係はなさそうである。したがって，essential には（2.12）で Spin の commutator の項のみを残せばよい。

ここで注意すべきことは，多時間 Green 関数を導入せず2時間 Green 関数で議論しても，決ってうまく spin の性質を分離出来ないということである。それを調べるために次の運動方程式を考えよう。

$$
\begin{aligned}
&(d/d\tau) \ll (S\cdot\sigma\ a_p)(\tau)\ ;\ a_{p'}^{+}(S\cdot\sigma) \gg \\
&= \ll [H,(S\cdot\sigma\ a_p)](\tau)\ ;\ a_{p'}^{+}\ S\cdot\sigma \gg \\
&- < \{ S\cdot\sigma\ a_p,\ a_{p'}^{+}(S\cdot\sigma)\}_+ > \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

ここで $[H,\ S\cdot\sigma] \simeq 0$ とおいてみよう。そうすると右辺は

$$
\begin{aligned}
&- \varepsilon_p \ll (S\cdot\sigma\ a_p)(\tau)\ ;\ a_{p'}^{+}(S\cdot\sigma) \gg \\
&+ (J/N)\Sigma_{p''} \ll (S\cdot\sigma)^2 a_{p''}(\tau)\ ;\ a_{p'}^{+}(S\cdot\sigma) \gg \\
&- [<(S\cdot\sigma)^2> \delta_{pp'} + 2 < a_p^{+}(S\cdot\sigma)a_{p'} > ]\ \delta(\tau) \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

Self－energy part の3次の項が問題になるから，

$$
\begin{aligned}
&(d/d\tau + \varepsilon_p) \ll (S\cdot\sigma)^2\ a_{p''}(\tau)\ ;\ a_{p'}^{+}(S\cdot\sigma) \gg \\
&\qquad \cong - \delta_{p'p''} < (S\cdot\sigma)^3 > \delta(\tau) \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

そこで

$$
\begin{aligned}
&\ll (S\cdot\sigma)\ a_p(i\varepsilon),\ \ a_{p'}^{+}(S\cdot\sigma) \gg \\
&= (i\varepsilon-\varepsilon_p)^{-1} [S(S+1)\delta_{pp'} + 2 < a_{p'}^{+}(S\cdot\sigma)a_{p'} > ] \\
&- (J/N)(i\varepsilon-\varepsilon_p)^{-1} S(S+1)(i\varepsilon-\varepsilon_{p'})^{-1} \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

この両辺を p，p′ で加えても（J／N）が explicit にある項は $\log$ － singularity を与えない。また，

$$\ll a_{p''}(i\epsilon),\ a^{+}_{p'}(S\cdot\sigma)\gg$$

$$\cong (i\epsilon-\epsilon_{p'})^{-1}(-J/N)S(S+1)\ (i\epsilon-\epsilon_{p})^{-1}$$

を使っても（2.1 6）の〔　　　〕の第２項は self－energy part に

$$N_i(-J/N)^3\,\pi i\rho\ 2S(S+1)\,\log(\epsilon/D)$$

を与えるだけで Kondo の求めたものの半分である。このようなことになったのは（2.1 3）で〔H，S・σ〕を無視したからである。われわれの Formulation で〔H，(S・σ)〕から出来る electron－hole pair は，いずれ自ら recombine するが（2.1 3）で生じる pair は，$a_p$ 及び $a^{+}_{p'}$ で表わされる電子及び正孔と recombine することが出来る。ということは，（2.1 3）で〔H，(S・σ)〕の項の一部は，われわれの spin Green 関数そのもので記述出来ることを示している。このように２時間 Green 関数の方法は，同じ〔H，(S・σ)〕が二つの意味をもつということから，各項の物理的意味がはっきりしない。

## §３．Spin Fluctuation の計算法

前の節で指摘したように，（2.1 2）で classical spin の性質を表わす項及び〔H・S・σ〕のある項を無視して，spin の quantum fluctuation の性質のみを考慮に入れることにしよう。そこで（2.1 2）は次のように reduce される。

$$S^{(1)}_{\uparrow\uparrow}(\epsilon,\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n)$$

$$= (i\epsilon_n-i\epsilon_{n-1})^{-1}\Big[\ll\cdots,S_{n-1}(\epsilon_{n-2}-\epsilon_{n-1})\,[S_n,S_{n+1}](\epsilon_{n-1}-\epsilon)\gg$$

$$+\ll\cdots\cdots,[S_n,S_{n-1}](\epsilon_{n-2}-\epsilon_n)\ S_{n+1}(\epsilon_n-\epsilon)\gg$$

$$+\ \text{他の commutator を含む項}\Big]\ (1-\delta_{\epsilon_n\epsilon_{n-1}})$$

$$-\delta_{\varepsilon_n \varepsilon_{n-1}} \Sigma_{\varepsilon_n \neq \varepsilon_{n-1}} \text{（上の項全体）} \tag{3.1}$$

（3.1）の右辺は spin operator の commutator を含んでいるから，spin operator の数は左辺より必ず少ない項のみである。従って（3.1）を繰返し摘用すれば $S^{(1)}(\varepsilon, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ は最終的に

$$S^{(1)}(\varepsilon, \varepsilon') = \langle\langle (S\cdot\sigma)(\varepsilon-\varepsilon'),\ (S\cdot\sigma)(\varepsilon'-\varepsilon) \rangle\rangle \tag{3.2}$$

によって書ける。従って原理的には（3.2）の値が判れば quantum fluctuation の effect は完全に計算出来るのである。まず，

$$[(S\cdot\sigma)_{\alpha\beta},\ (S\cdot\sigma)_{\beta\gamma}] = -2(S\cdot\sigma)_{\alpha\gamma}$$

に注意すれば（3.1）の［　］の中の最初の2項は簡単に

$$2\{S^{(1)}(\varepsilon, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}) - S^{(1)}(\varepsilon, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-2}, \varepsilon_n)\}$$

に書き換えられる。“他の commutator を含む項”はこんなに簡単には書けない。

“他の commutator を含む項”については，次の公式がある。

（定理）
$$\begin{aligned}
&\langle\langle \cdots\cdots, [S_n, S_{n-m}](\varepsilon_{n-m-1}-\varepsilon_{n-m}+\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n), \\
&\qquad \cdots\cdots, S_{n-1}(\varepsilon_{n-2}, -S_{n-1}), S_{n+1}(\varepsilon_n-\varepsilon) \rangle\rangle \\
&= (-1)^{m-1}[\langle\langle \cdots\cdots, S_{n-m-1}(\varepsilon_{n-m-2}-\varepsilon_{n-m-1}), \\
&\qquad S_{n-1}(\varepsilon_{n-m-1}-\varepsilon_{n-m}+\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n),\ S_{n-2}(\varepsilon_{n-m}-\varepsilon_{n-m+1}), \\
&\qquad \cdots\cdots,\ S_{n-m}(\varepsilon_{n-2}-\varepsilon_{n-1}),\ S_n(\varepsilon_n-\varepsilon) \rangle\rangle \\
&\quad + \langle\langle \cdots\cdots, S_{n-m-1}(\varepsilon_{n-m-2}-\varepsilon_{n-m-1}),\ S_{n-m}(\varepsilon_{n-m-1}-\varepsilon_{n-m} \\
&\qquad +\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n),\ S_{n-1}(\varepsilon_{n-m}-\varepsilon_{n-m-1}),\ \cdots\cdots, \\
&\qquad S_{n-m+1}(\varepsilon_{n-2}-\varepsilon_{n-1}),\ S_n(\varepsilon_m-\varepsilon) \rangle\rangle]
\end{aligned} \tag{3.3}$$

（証明）　（3.3）の振動数依存性は自明故，spin operator の並び方についてのみ証明すればよい。spin operator の列を記述する次のように記号を定義しよう。

$\vec{\mathcal{R}}^{0}(n)$；これはn個の spin operator の列である。superfix "0" は $S_-$ の数と $S_+$ の数が等しいことを示す。　→ は，左からたどっていって $S_-$ が出るまでは $S_+$ が出ないことと，$S_-$ と次の $S_+$ の間の $S_z$ はみな $-S_z$ の形で入っていることを示す。たとえば

$$\vec{\mathcal{R}}^{0}(3) = (S_z, S_z, S_z) + (S_z, S_-, S_+)$$
$$+ (S_-, -S_z, S_+) + (S_-, S_+, S_z)$$

$\vec{\mathcal{R}}^{+}(n)$；　$S_+$ の数は $S_-$ の数より一つ多い。左からたどっていくと，$S_-$ より前に $S_+$ があらわれ，以後は $S_-$ があらわれないと $S_+$ は出て来ない。$S_-$ と，$S_+$ の間の $S_z$ は $-S_z$ という形をしている。たとえば

$$\vec{\mathcal{R}}^{+}(3) = (S_+, S_z, S_z) + (-S_z, S_+, S_z)$$
$$+ (-S_z, -S_z, S_+) + (S_+, S_-, S_+)$$

$\vec{\mathcal{R}}^{-}(n)$；　$S_-$ の数の方が一つ多い。

次のような集合の代数和が成立する。

$$\vec{\mathcal{R}}^{0}(n) = \vec{\mathcal{R}}^{0}_{zz}(n) + \vec{\mathcal{R}}^{0}_{-z}(n) + \vec{\mathcal{R}}^{0}_{z+}(n) + \vec{\mathcal{R}}^{0}_{-+}(n) \qquad (3.4)$$

$$\vec{\mathcal{R}}^{0}_{zz}(n) = S_z, \vec{\mathcal{R}}^{0}(n-2), S_z$$

$$\vec{\mathcal{R}}^{0}_{-z}(n) = S_-, \vec{\mathcal{R}}^{+}_{0}(n-2), S_z$$

$$\vec{\mathcal{R}}^{0}_{z+}(n) = S_z, \overleftarrow{\mathcal{R}}^{-}(n-2), S_+$$

$$\vec{\mathcal{R}}^{0}_{-+}(n) = (-1)^n S_-, \overleftarrow{\mathcal{R}}^{0}(n-2), S_+ \qquad (3.5)$$

ここで $\overleftarrow{\mathcal{R}}$ は $\vec{\mathcal{R}}$ の中の順序左右ひっくり返したものである。$\vec{\mathcal{R}}^{-}$，$\vec{\mathcal{R}}^{+}$ につい

ても同様な分解が出来る。たとえば

$$s_1,\ s_2,\ \cdots\cdots,\ s_n = \overrightarrow{\mathcal{R}}^{0}(n)$$

の場合

$$\begin{aligned}
&[\, s_n,\ s_1\,],\ s_2,\ \cdots\cdots,\ s_{n-1} \\
&= [\, s_z,\ s_-\,]\ \overrightarrow{\mathcal{R}}^{+}(n-2) + [\, s_+,\ s_z\,]\ \overrightarrow{\mathcal{R}}^{-}(n-2) \\
&\qquad + (-1)^n [\, s_+,\ s_-\,]\ \overleftarrow{\mathcal{R}}^{0}(n-2) \\
&= -\ s_-,\ \overrightarrow{\mathcal{R}}^{+}(n-2) - s_+\ \overrightarrow{\mathcal{R}}^{-}(n-2) + (-1)^n 2 s_z,\ \overleftarrow{\mathcal{R}}^{0}(n-2)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

ここで

$$\overrightarrow{\mathcal{R}}^{-}(n) = (-1)^{n-1}\ \overleftarrow{\mathcal{R}}^{-}(n)$$

$$s_+\ \overleftarrow{\mathcal{R}}^{-}(n) = \overleftarrow{\mathcal{R}}^{0}_{+z}(n+1) + \overleftarrow{\mathcal{R}}^{0}_{+-}(n+1)$$

等を使うと

$$\begin{aligned}
(3.6) = (-1)^n [\, & s_+,\ \overleftarrow{\mathcal{R}}^{-}(n-2) + s_z,\ \overleftarrow{\mathcal{R}}^{0}(n-2) \\
& + \overleftarrow{\mathcal{R}}^{0}(n-1)\,]
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$s_1,\ s_2,\ \cdots\cdots,\ s_n = \overrightarrow{\mathcal{R}}^{+}(n),\ \overrightarrow{\mathcal{R}}^{-}(n)$ の場合も同様の手続きで

$$\begin{aligned}
[\, s_n,\ s_1\,] = (-1)^n \{ & s_1,\ s_{n-1},\ \cdots\cdots,\ s_2 \\
& + s_{n-1},\ s_{n-2},\ \cdots\cdots,\ s_1 \}
\end{aligned} \qquad \text{Q.E.D}$$

以上の議論を使って，漸化式（3.1）は原理的に解くことが出来るが，それを一般的に解くことは困難である。次の節で self－energy part の most divergent term に効く項のみを計算してみよう。

## §4. Most divergent term の計算

まず self－energy part の $J^3$ の項を計算しよう。そのためには，

$S^{(1)}_{\uparrow\uparrow}(\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ を計算すればよいから（2.12）を使って

$$S^{(1)}_{\uparrow\uparrow}(\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$$
$$= (i\varepsilon_2 - i\varepsilon_1)^{-1}\left[2S^{(1)}_{\uparrow\uparrow}(\varepsilon, \varepsilon_2) - 2S^{(1)}_{\uparrow\uparrow}(\varepsilon, \varepsilon_1)\right](1-\delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2})$$
$$- \delta_{\varepsilon_2\varepsilon_1} \Sigma_{\varepsilon_2 \neq \varepsilon_1}(i\varepsilon_2 - i\varepsilon_1)^{-1}\ 2S^{(1)}_{\uparrow\uparrow}(\varepsilon, \varepsilon_2) \tag{4.1}$$

（3.2）は次のように近似出来る。

$$S^{(1)}_{\uparrow\uparrow}(\varepsilon, \varepsilon') \cong -S(S+1)\beta\delta_{\varepsilon, \varepsilon'} \tag{4.2}$$

そこで（4.1）から

$$S^{(1)}_{\uparrow\uparrow}(\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = -2S(S+1)\beta\left[(i\varepsilon - i\varepsilon_1)^{-1}\delta_{\varepsilon, \varepsilon_1}(1-\delta_{\varepsilon, \varepsilon_1})\right.$$
$$+ (i\varepsilon - i\varepsilon_2)^{-1}\delta_{\varepsilon, \varepsilon_2}(1-\delta_{\varepsilon\ \varepsilon_2})$$
$$\left. - \delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(i\varepsilon - i\varepsilon_1)^{-1}(1-\delta_{\varepsilon\ \varepsilon_1})\right]$$

（2.8）を使うと，self－energy part の３次の項は

$$\Sigma^{(3)}(\varepsilon)$$
$$= N_i(-J/N)^3 4S(S+1)\Sigma_{pp'}T\Sigma_{\varepsilon'}(i\varepsilon - i\varepsilon')^{-1}$$
$$\times\left[(i\varepsilon - \varepsilon_p)^{-1}(i\varepsilon' - \varepsilon_{p'})^{-1} + \frac{1}{2}(i\varepsilon' - \varepsilon_p)^{-1}(i\varepsilon' - \varepsilon_{p'})^{-1}\right] \tag{4.3}$$

ここで

$$\Sigma_{p'}(i\varepsilon - \varepsilon_{p'})^{-1} \cong -\pi i\rho\ \mathrm{sign}(\varepsilon)$$

を使うと（4.3）の〔　　　〕の第一項から

$$\Sigma^{(3)}(\varepsilon) = -N_i(-J/N)^3 4S(S+1)(\pi\rho)^2\ i\ \mathrm{sign}(\varepsilon)$$
$$\times \log|\varepsilon/D| \tag{4.4}$$

（4.3）の〔　　　〕の第２項は，

$$T\Sigma_\varepsilon (i\varepsilon - i\varepsilon')\,[\,\mathrm{sign}\,\varepsilon'\,]^2 \cong o(\varepsilon/D)$$

故無視出来る。

（4.1）では，（2.9）の右辺の｛　　　｝の中で最初の２項のみをとり，（2.1 2）の右辺第一項のみを考えるとそれで $o(J^3)$ の most divergent term が得られた。ここでは，その近似を更に高次の Green 関数にも摘要しよう。すなわち，次の漸化式を解く。

$$\begin{aligned} & S^{(1)}_{\uparrow\uparrow}(\varepsilon, \varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_n) \\ & = [\,(i\varepsilon_n - i\varepsilon_{n-1})^{-1}\; 2\; S^{(1)}_{\uparrow\uparrow}(\varepsilon, \varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_{n-2}, \varepsilon_n) \\ & \quad + (i\varepsilon_{n-1} - i\varepsilon_n)^{-1}\; 2\; S^{(1)}_{\uparrow\uparrow}(\varepsilon, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-2}, \varepsilon_{n-1})\,]\,(1-\delta_{\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}}) \end{aligned} \tag{4.5}$$

（4.5）を初期条件（4.2）のもとでといて，その時，Kronecker $\delta$ がただひとつの項のみを集めると

$$\begin{aligned} & S^{(1)}_{\uparrow\uparrow}(\varepsilon, \varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_n) \\ & = -\, 2^{n-1} S(S+1)\, \beta \sum_{k=1}^{n} \Big( \prod_{j=1}^{n} (i\varepsilon_k - i\varepsilon_j)^{-1}\, \delta_{\varepsilon_k, \varepsilon_j} \Big) \end{aligned} \tag{4.6}$$

ここで $\prod_{j=1}^{n}{}^{(k)}$ は，$j \neq k$ を除いて，$j=1$ から $n$ までの相乗積をとることを意味する。（4.6）を（2.8）に代入すると，$o(J^3)$ の時と同様に

$$\begin{aligned} \Sigma_{p\uparrow}(\varepsilon) &= -\, N_i (J/N)^2 S(S+1)\, \pi\rho i\; \mathrm{sign}(\varepsilon) \\ & \quad \times [\,1 - (2J\rho/N)\,\log|\varepsilon/D|\,]^{-2} \end{aligned} \tag{4.7}$$

この $\varepsilon$ は，$(2n+1)\pi T$ だが $i\varepsilon$ を解析接続すれば real な振動数 $\varepsilon$ に対して（4.7）が成りたつ。そうすると（4.7）は，まさに Abrikosov の式である。[7]

§5. Discussion

Spin Green 関数の運動方程式（2.9）または（2.12）で一部分だけをとると，Abrikosov の expression が得られた。

“lower divergent term の起源”を論ずる前に，most divergent term の起源についておさえておくことは有用である。Introduction で列挙した spin の3つの性質のうち，第3の性質，すなわち，quantum fluctuation の性質のみが most divergent term に効くと期待出来ることは§3で述べたが，実際（4.7）は，spin の operator が交換しないことから得られた。しかも，（4.7）は，spin の quantum fluctuation の一部しか考慮にいれていない。このことは，（2.9）の“他の commutator のある項”があまり重要でないこと，を示唆している。quantum fluctuation をこのように類別する為の physical な根拠は判らないが，“他の commutator の項”が実際 most divergent term に効かないことは示せる。

Ref.1 で，同じ近似法で，帯磁率の most divergent term に対する式も得られることを示した。電子と spin の bound state に対する Yoshimori 方程式[10] も，spin の quantum fluctuation に対し，同じ近似を使って導けることも示した。しかし，Yoshimori 方程式は，Nakajima によってより明快に導びかれたから，今後もふれないでおこう。帯磁率については，いずれ考えをあらたに報告するつもりである。

ここで述べた方法を使うと，spin の物理的性質をよく理解しながら近似が出来ることは，前述のとおりであるが，計算法としても他の諸理論で使われたものより，簡単であるという自負心は持っている。特に，単純な摂動展開をやる際に，この方法は，他のものにくらべて，見とうしがよいし，簡単である。この論文で提案した方法に基づいて，低次の項を計算し，lower divergent term について論じるのは別稿にまわしたい。

## 謝　　辞

筆者が物性研にいた間に，中嶋貞雄先生，芳田奎先生，吉森昭男先生，阿部竜蔵先生には，いろいろ御指導いただいた。特に s－d について，いろい

ろ御教示いただいたことについて，感謝しなくてはならないが，それにもかかわらずトンチンカンなことを議論したかも知れぬことをおそれている。また，輿地斐男氏，石井広湖氏，桜井明夫氏には，あまりにも初歩的なことを質問したりして，仕事の邪魔をしたにもかかわらず，親切に教えていただいた。深く感謝する。斯波弘行氏も初期の段階でいろいろ討論していただいたこともつけ加えなくてはならない。

## 文　　献

1） K.Kawamura, ISSP Technical Report A.300
2） K.Yosida, Phys. Sev. 106 (1957), 893
3） A.A.Abrikosov and L.P.Gor'kov, Souiet Phys. -JETP 12 (1961), 1243
4） H.Hasegawa, Prog. Theor. Phys. 21 (1959), 483
5） J.Kondo, Prog. Theor. Phys. 32 (1964), 37.
6） R.Abe, Prog. Theor. Phys. 36 (1966), 454
7） A.A.Abrikosov, Physics 2 (1965), 5.
8） S.Nakajima, ISSP Technical Report A.294.
9） S.Doniach, Phys. Rev. 144 (1966), 382.
10） A.Yoshimori, ISSP Technical Report A.285.
11） K.Yosida, Phys. Rev. 147 (1966), 223.
12） K.Kawamura, Prog. Theor. Phys. to be published.